آزمون جامع «۱»

۱. گزینه‌ی (۱)

$f(x)=\frac{x}{2-x} \quad gof(x)=g(f(x))=\frac{1}{2}x$

$f(x)$ با توجه به تابع $\Rightarrow g(\frac{x}{2-x})=\frac{1}{2}x$

برای اینکه داخل پرانتز $g(\frac{x}{2-x})$ به یک متغیر تبدیل شود باید کل داخل پرانتز را برابر متغیری مانند t قرار دهیم و سپس x را برحسب t به دست آوریم و در $g(\frac{x}{2-x})=\frac{1}{2}x$ جایگزین کنیم.

$\frac{x}{2-x}=t \Rightarrow x=2t-xt \Rightarrow x+xt=2t \to x(1+t)=2t$

$x=\frac{2t}{1+t}$

$\Rightarrow g(t)=\frac{1}{2}\times\frac{2t}{1+t}=\frac{t}{1+t} \qquad g(x)=\frac{x}{1+x}$

۲. گزینه‌ی (۲)

در صورتی مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها تابع است که مؤلفه‌ی اول آن‌ها تکراری نباشد و اگر مؤلفه‌ی اول تکراری است، مؤلفه‌ی دوم آن‌ها نیز مانند هم باشد.

$4=a^2+3a \Rightarrow a^2+3a-4=0 \to \begin{cases} a=1 \\ a=-4 \end{cases}$

با مقادیر به دست آمده برای a، مجدداً زوج مرتب‌ها را بازنویسی می‌کنیم و می‌بینیم که تابع است.

$\begin{cases} a=-4 \\ a=1 \end{cases} \Rightarrow \{(1,-1)(4,3)(2,4)\cancel{(2,4)}\}$

$a=1$ در گزینه‌ی‌ها می‌باشد.

۳. گزینه‌ی (۱)

در اینگونه موارد ابتدا دامنه‌ی $f(x)$ و $g(x)$ را به طور مجزا حساب می‌کنیم و از آن‌ها اشتراک می‌گیریم. از طرفی مخرج نباید صفر شود، سپس عددی را که مخرج را صفر می‌کند نیز از اشتراکی که گرفتیم حذف می‌کنیم.

$D_f: x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

$D_g: 2x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{0\}$

$D\{\frac{f}{g-1}\}=D_f\cap D_g-\{g(x)-1=0\}=\mathbb{R}-\{0,-1\}-\{\frac{1}{2}\}$

$g(x)=1 \Rightarrow \frac{1}{2x}=1 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

۴. گزینه‌ی (۴)

هرچه زیر رادیکال می‌باشد را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار می‌دهیم.

a) $\sqrt{x}-x\ge 0 \Rightarrow \sqrt{x}\ge x \xrightarrow{\text{توان ۲}} x\ge x^2 \to x^2-x\le 0$

	0		1	
+	0	−	0	+

$[0,1]$ ①

از طرفی x نیز زیر رادیکال است پس x را نیز بزرگ‌تر مساوی صفر قرار می‌دهیم.

b) $x\ge 0$ ②

از طرفی مخرج نباید صفر شود پس xهایی که مخرج را صفر می‌کند، از دامنه باید حذف کرد.

c) $[x]=0 \Rightarrow 0\le x<1 \to \mathbb{R}-\{0\le x<1\}$

$=(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$ ③

① ∩ ② ∩ ③ : $\{1\}$

۵. گزینه‌ی (۱)

$g=\{(2,3)(3,4)(5,6)\}$

$f=\{(2,5)(3,4)(4,5)\}$

$fog(x)=f(g(x))=\{(2,4)(3,5)(5,\times)\}=\{(2,4)(3,5)\}$

چون $f(g(x))$ را می‌خواهیم به دست آوریم باید xهای $g(x)$ را قرار دهیم.

$\xrightarrow{x=2} f(\underbrace{g(2)}_{3})=f(3)=4 \Rightarrow (2,4)$ ورودی

$f(g(x)) \xrightarrow{x=3} f(\underbrace{g(3)}_{4})=f(4)=5 \Rightarrow (3,5)$

$\xrightarrow{x=5} f(\underbrace{g(5)}_{6})=f(6)$ وجود ندارد

۶. گزینه‌ی (۱)

روش اول باید هر آنچه داخل پرانتز f هست را برابر t قرار دهیم و x را برحسب t تنها کنیم.

$f(\frac{1}{x})=\frac{\sqrt{x}}{x+1} \Rightarrow f(t)=\frac{\sqrt{\frac{1}{t}}}{\frac{1}{t}+1} \Rightarrow f(4)=\frac{\sqrt{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}+1}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

$\frac{1}{x}=t \to x=\frac{1}{t}$

روش دوم می‌توانستیم از همان ابتدا $x=\frac{1}{4}$ قرار دهیم. زیرا:

$\frac{1}{x}=4 \Rightarrow x=\frac{1}{4}$

$f(4)=\frac{\sqrt{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}+1}=\frac{2}{5}$

۷. گزینه‌ی (۲)

الف) $\sqrt{x}+\sqrt{y^2+1}=1$

ب) $|x|+|y^2-1|=0$

جمع دو عبارت همیشه مثبت زمانی صفر می‌شود که هر کدام از آن‌ها برابر صفر باشند.

$\Rightarrow |x|=0 \to x=0$

$|y^2-1|=0 \to y^2-1=0 \to y=\pm 1$

$\{(0,1)(0,-1)\}$ تابع است

ج) $xy-x=0 \Rightarrow x(y-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

۸. گزینه‌ی (۱)

هنگامی در یک نقطه متقاطع‌اند، یعنی آن نقطه در هر دو تابع صدق می‌کند.

$y=2x^2+mx+h$

$y = ۲x + h$

از طرفی چون نقطه به طول ۲ روی محور xها است یعنی مختصات نقطه (۲,۰) است زیرا هر نقطه روی محور xها، y برابر صفر دارد. یعنی نقطه (۲,۰) در هر دوی این توابع صدق می‌کند.

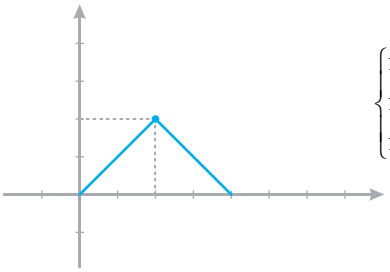
$۲(۲)^۲ + ۲m + h = ۰ \Rightarrow ۲m + h = -۸$

$۲(۲) + h = ۰ \Rightarrow ۴ + h = ۰ \rightarrow \underline{h = -۴}$

$۲m - ۴ = -۸ \Rightarrow ۲m = -۴ \Rightarrow \underline{m = -۲}$

۹. گزینه‌ی (۳)

چون تغییرات روی x ها است، ما باید عکس این تغییرات را اعمال کنیم یعنی:



$$\begin{cases} f(۰) = ۰ \\ f(۲) = ۲ \\ f(۴) = ۰ \end{cases}$$

در تابع $y = f(\frac{۱}{۲}x)$ داریم:

$$\begin{cases} x = ۰ \Rightarrow f(۰) = ۰ \\ x = ۴ \Rightarrow f(۴ \times \frac{۱}{۲}) = f(۲) = ۲ \Rightarrow \text{گزینه‌ی (۳)} \\ x = ۸ \Rightarrow f(۸ \times \frac{۱}{۲}) = f(۴) = ۰ \end{cases}$$

۱۰. گزینه‌ی (۱)

برای به دست آوردن دامنه‌ی ترکیب دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ یعنی $f(g(x))$ یا $g(f(x))$، ابتدا دامنه‌ی $f(x)$ و $g(x)$ را جداگانه به دست می‌آوریم.

$f(x) = ۴x^۲ - ۱ \qquad D_f : \mathbb{R}$

$g(x) = \sqrt{۱ - x^۲} \qquad D_g : ۱ - x^۲ \geq ۰ \rightarrow x^۲ \leq ۱ \Rightarrow -۱ \leq x \leq ۱$

و سپس با استفاده از رابطه‌ی زیر خواهیم داشت:

$D_{gof(x)} : \{D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{\mathbb{R} \cap \underbrace{۴x^۲ - ۱ \in [-۱,۱]}_{-۱ \leq ۴x^۲ - ۱ \leq ۱}\}$

$-۱ \leq ۴x^۲ - ۱ \leq ۱$

$۰ \leq ۴x^۲ \leq ۲ \Rightarrow ۰ \leq x^۲ \leq \frac{۱}{۲}$

$-\frac{\sqrt{۲}}{۲} \leq x \leq \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$\Rightarrow D_{gof(x)} = \mathbb{R} \cap [-\frac{\sqrt{۲}}{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲}] = [-\frac{\sqrt{۲}}{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲}]$

۱۱. گزینه‌ی (۱)

همان‌طور که در سؤالات قبلی داشتیم، داخل پرانتز را برابر t قرار می‌دهیم:

$f(x^۲ - ۱) = ۲x$

$x^۲ - ۱ = t \Rightarrow x^۲ = t + ۱ \Rightarrow x = \sqrt{t + ۱}$

$f(t) = ۲\sqrt{t + ۱} \Rightarrow f(x) = ۲\sqrt{x + ۱}$

۱۲. گزینه‌ی (۴)

ابتدا هر آنچه زیر رادیکال است را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$۹ - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ \leq ۹ \Rightarrow -۳ \leq x \leq ۳ \quad ①$

سپس مخرج را برابر صفر قرار می‌دهیم و مقادیری که مخرج را صفر کنند، از دامنه حذف می‌کنیم.

$[x] - ۲ = ۰ \Rightarrow [x] = ۲ \rightarrow ۲ \leq x < ۳ \Rightarrow \mathbb{R} - \{۲ \leq x < ۳\} \quad ②$

$① \cap ② : [-۳,۲) \cup \{۳\}$

۱۳. گزینه‌ی (۱)

یعنی به جای هر x در تابع $f(x)$، باید تابع $f(x)$ را قرار دهیم:

$$f(f(x)) = \frac{\frac{x+۱}{x-۱} + ۱}{\frac{x+۱}{x-۱} - ۱} = \frac{\frac{x+۱+x-۱}{x-۱}}{\frac{x+۱-x+۱}{x-۱}} = \frac{۲x}{۲} = x$$

۱۴. گزینه‌ی (۳)

$f = \{(-۱,۲)(۳,۵)(۴,۷)\}$

$g = \{(۲,a)(b,۳)(۹,۱۱)\}$

$gof(x) = g(f(x)) = \{(-۱,a)(۳,○)(۴,○)\}$

$\rightarrow (-۱,۵) \in gof(x) \Rightarrow \underline{a = ۵}$

$f(g(x)) = \{(۲,\cancel{○})(b,۵)(۹,\cancel{○})\} \rightarrow (۸,۵) \in fog(x)$

$\Rightarrow \underline{b = ۸}$

$a + b = ۵ + ۸ = ۱۳$

۱۵. گزینه‌ی (۴)

هر آنچه زیر رادیکال است را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$a) ۱ - \log(x - ۱) \geq ۰ \Rightarrow \log(x - ۱) \leq ۱$

$\Rightarrow \log^{(x+۱)} \leq \log^{۱۰} \Rightarrow x - ۱ \leq ۱۰ \Rightarrow x \leq ۱۱ \quad ①$

از طرفی $\log_b^a$ باید همواره $a > ۰$ باشد بنابراین:

$b) x - ۱ > ۰ \Rightarrow x > ۱ \quad ②$

$① \cap ② : (۱,۱۱]$

آزمون جامع «۲»

۱. گزینه‌ی (۱)

مثلاً $f(x)$ دارای زوج مرتب (۱,۲) و $g(x)$ دارای زوج مرتب (۱,۵) است، اگر از ۲ تابع اجتماع بگیریم، $f \cup g$ دارای دو زوج مرتب (۱,۲) و (۱,۵) می‌باشد که در نتیجه تابع نیست.

۲. گزینه‌ی (۳)

ابتدا داخل پرانتز f را مساوی یک پارامتر مانند t قرار می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} f(x+۲) = x^۲ - ۱ \\ x + ۲ = t \Rightarrow x = t - ۲ \end{array}\right\} \Rightarrow f(t) = (t-۲)^۲ - ۱$$

$f(x-۲) = (x-۲-۲)^۲ - ۱ = (x-۴)^۲ - ۱ = x^۲ - ۸x + ۱۶ - ۱$

$f(x-۲) = x^۲ - ۸x + ۱۵$

۳. گزینه‌ی (۲)

هر تغییراتی روی x انجام شود، عکس آن تغییرات باید روی دامنه صورت گیرد چون در $f(\frac{x}{۲})$، xها تقسیم بر ۲ شده‌اند، دامنه باید ضرب در ۲ شود.

$[-۶,۲] \rightarrow [-۱۲,۴]$

۴. گزینه‌ی (۲)

ابتدا $f(f(x))$ را تشکیل می‌دهیم یعنی در تابع $f(x)$ به جای هر x، $f(x)$ را قرار می‌دهیم.

$$f(x)=x^2-1$$
$$f(f(x))=(x^2-1)^2-1$$

و برای یافتن نقطه‌ی برخورد با محور xها کافی است y را مساوی صفر قرار دهیم:

$$\text{برخورد با محور xها} \Rightarrow y=0 \Rightarrow (x^2-1)^2-1=0 \to (x^2-1)^2=1$$

$$\begin{cases} x^2-1=1 \to x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} & \text{نقاط تلاقی} \\ x^2-1=-1 \to x^2=0 \to x=0 & \text{نقاط تماس} \end{cases}$$

نکته: چون x از درجه‌ی ۲ است، باید ۲ ریشه داشته باشد که هنگامی که فقط ۱ ریشه به ما می‌دهد یعنی ریشه‌ی مضاعف یا نقطه‌ی تماس است.

۵. گزینه‌ی (۲)

$$D_{gof(x-1)}=?$$

ابتدا تابع $f(x-1)$ را تشکیل می‌دهیم، یعنی به جای هر x در $f(x)$، $x-1$ را قرار می‌دهیم.

$$h(x)=f(x-1)=\frac{x-1-1}{x-1+1}=\frac{x-2}{x} \to D_{h(x)}=\mathbb{R}-\{0\}$$

$$g(x)=\frac{x}{x-2} \to D_{g(x)}=\mathbb{R}-\{2\}$$

$$D_{g(h(x))}=\{D_{h(x)} \mid h(x)\in D_{g(x)}\}$$

$$=\{\mathbb{R}-\{0\}\cap \overbrace{\frac{x-2}{x}\in\mathbb{R}-\{2\}}^{\frac{x-2}{x}\neq 2 \Rightarrow x-2\neq 2x,\ x\neq -2}\}=\mathbb{R}-\{0,-2\}$$

۶. گزینه‌ی (۱)

$$f(g(x))=x^2+5x+5$$
$$f(x)=x^2+3x+1 \Rightarrow g(x)=?$$

بهترین راه این است که به x عددی دلخواه مثلاً $x=1$ می‌دهیم و ۴ گزینه‌ی: ۱) ۲، ۲) $\frac{11}{5}$ ، ۳) ۶، ۴) ۰ به دست می‌آید آن گاه در ضابطه‌ی $f(g(x))$ یعنی x^2+5x+5 نیز $x=1$ می‌گذاریم و ۱۱ به دست می‌آید آن گاه باید ببینیم کدام از ۴ گزینه‌ی را در ضابطه‌ی $f(x)$ جایگزین کنیم به ما ۱۱ را می‌دهد.

$f(2)=2^2+3(2)+1=11$ (گزینه‌ی «۱»)

۷. گزینه‌ی (۱)

راه‌حل همان راه تستی سؤال ۶ است اما این مسئله را از راه تشریحی حل می‌کنیم:

به جای x، $g(x)$ را در تابع $f(x)$ قرار می‌دهیم:

$$f(x)=(x+1)^2$$
$$f(g(x))=x^4 \quad ①$$
$$f(g(x))=(g(x)+1)^2 \quad ②$$
$$① = ② \Rightarrow (g(x)+1)^2=x^4 \Rightarrow g(x)+1=x^2$$
$$\Rightarrow g(x)=x^2-1$$

۸. گزینه‌ی (۲)

در صورتی مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها تابع است که مؤلفه‌ی اول آن‌ها تکراری نباشد و اگر مؤلفه‌ی اول آن‌ها تکراری است مؤلفه‌ی دوم آن‌ها نیز مانند هم باشد.

دو زوج مرتب که مؤلفه اول آن‌ها ۳ است را در نظر می‌گیریم؛ باید مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز شبیه به هم باشند.

$$m^2=m+2 \Rightarrow m^2-m-2=0 \Rightarrow m-1$$
$$m=2$$

حال مجدداً رابطه را با مقادیر به دست آمده بازنویسی کرده و بررسی می‌کنیم.

$$m=-1 \Rightarrow \{(3,1)(2,1)(-2,-1)(3,1)(-1,4)\}$$
$$m=2 \Rightarrow \{(3,4)(2,1)(-2,2)(3,4)(2,4)\}$$

مشکل ایجاد می‌کنند

۹. گزینه‌ی (۳)

اگر x^2+2x را برابر A در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} A\geq 0 & ① \\ \frac{-1}{A}\geq 0 \xrightarrow{①} \text{غیرممکن است} \Rightarrow \text{چون } A\geq 0 \text{ است} \end{cases}$$

۱۰. گزینه‌ی (۲)

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt[3]{x+1} \\ g(x)=x^2+6 \end{cases}$$

$$\frac{fog(1)}{(f+g)(7)}=\frac{f(\overbrace{g(1)}^{7})}{f(7)+g(7)}=\frac{2}{2+55}=\frac{2}{57}$$

$$\begin{cases} g(1)=7 \\ f(g(1))=f(7)=\sqrt[3]{7+1}=2 \\ g(7)=7^2+6=49+6=55 \end{cases}$$

۱۱. گزینه‌ی (۲)

برای به دست آوردن $f(0)$ باید در ضابطه‌ی $f(x)$، ۰ را در ضابطه‌ی پایین قرار دهیم:

$$x=f(0)=0-1=-1$$
$$f(-1)+2g(-1)=(-1-1)+2(-1)=-2-2=-4$$

۱۲. گزینه‌ی (۳)

می‌دانیم دامنه تابع کسری برابر است با $\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌ی مخرج}\}$ بنابراین ۳ باید ریشه‌ی مخرج باشد، یعنی عامل $(x-3)$ باید در مخرج وجود داشته باشد و چون توان مخرج ۲ است بنابراین $(x-3)^2$ باید در مخرج وجود داشته باشد.

$$(x-3)^2=x^2-6x+9=x^2+ax+b$$
$$\begin{matrix} a=-6 \\ b=9 \end{matrix} \Rightarrow a+b=3$$

۱۳. گزینه‌ی (۴)

$$f(x)=3^x$$
$$f(x+2)-2f(x+1)=3^{x+2}-2\times 3^{x+1}$$
$$=3^x\times 3^2-2\times 3^x\times 3^1=9\times 3^x-6\times 3^x=3\times 3^x=3\times f(x)$$

۱۴. گزینه‌ی (۴)

۲ رادیکال داریم، هر آنچه زیر هر دو رادیکال است را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$۱-۲x \geq ۰ \Rightarrow ۲x \leq ۱ \Rightarrow x \leq \frac{۱}{۲} \quad ①$$

$$۴-\sqrt{۱-۲x} \geq ۰ \Rightarrow \sqrt{۱-۲x} \leq ۴$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} ۱-۲x \leq ۱۶ \Rightarrow ۲x \geq -۱۵$$

$$x \geq -\frac{۱۵}{۲} \quad ②$$

$$① \cap ② : -\frac{۱۵}{۲} \leq x \leq \frac{۱}{۲}$$

$-۷ \leq x \leq ۰ \rightarrow$ تعداد : $(۰-(-۷))+۱=۸$: عدد صحیح

نکته: اگر m و n عدد صحیح باشند، تعداد اعداد صحیح بازه‌ی $m \leq x \leq n$ برابر است با: $(n-m)+۱$

۱۵. گزینه‌ی (۱)

$$f(x) = ۲x^۲ + ۴$$

$$\begin{matrix} f(g(x)) = ۴x^۲ + ۶x \\ g(x) = ? \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} f(g(x)) = ۲(g(x))^۲ + ۴ \\ f(g(x)) = ۴x^۲ + ۶x \end{matrix}$$

$$\Rightarrow ۲(g(x))^۲ + ۴ = ۴x^۲ + ۶x \Rightarrow ۲(g(x))^۲ = ۴x^۲ + ۶x - ۴$$

$$\Rightarrow (g(x))^۲ = ۲x^۲ + ۳x - ۲$$

$$g(x) = \sqrt{۲x^۲ + ۳x - ۲}$$

$$g(-۲) = \sqrt{۲(-۲)^۲ + ۳(-۲) - ۲} = \sqrt{۸-۶-۲} = ۰$$